Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Παρασκευή 7/2/2020

Θέμα 1

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση Chebyshev

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + m^2y(x) = 0, x \in (-1,1).$$

(i) Αποκλειστικά με χρήση δυναμοσειρών, να αποδειχθεί ότι για $m \in \mathbb{N}$ η εξίσωση έχει μία πολυωνυμική λύση (την συμβολίζουμε με $T_m(x), m \in \mathbb{N}$). Να προσδιοριστούν οι πολυωνυμικές λύσεις για $m = 1, 2$.

(ii) Να αναχθεί η εν λόγω διαφορική εξίσωση στην μορφή $[p(x)y']' + q(x)y = 0$ και να αποδειχθεί ότι η ακολουθία των πολυωνύμων $(T_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ορθογώνια ως προς μία συνάρτηση βάρους στο διάστημα $[-1,1]$.

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E)\;\; y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = f(t),\;\; t \geq 0,\; f \in C([0,+\infty)).$$

(i) Να επιλυθεί η παραπάνω εξίσωση.

(ii) Να αποδειχθεί ότι:

(a) για $f(t) = \dfrac{2t+1}{3t+2t^{1/2}+1}$ όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες και

(b) για $f(t) = \dfrac{2t+1}{3t^2+2t^{1/2}+1}$ όλες οι λύσεις της (E) τείνουν προς το 0, για $t \to +\infty$.

Θέμα 3

(i) Θέτοντας $u = y\sqrt{x}$ να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = f(x),\;\; x > 0$$

όπου $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = (xy)^{2/3},\;\; y(1) = c$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις για $c = 0$. Πόσες λύσεις έχει για $c = 1$; Διατυπώστε την πρόταση που χρησιμοποιήσατε και εξηγείστε την έλλειψη του μονοσημάντου όταν $c = 0$ σε σχέση με την πρόταση που διατυπώθηκε.

Θέμα 4

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(2x^2 + 2y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + y)dy = 0.$$

(i) Αν είναι γνωστό ότι η εκίσωση έχει έναν όλοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\phi(x^2+y^2)$ με $\phi \in C^1(0,+\infty)$, να αποδειχθεί ότι η ϕ ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και έπειτα να προσδιοριστεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης (Υπόδειξη: Ο ολοκληρωτικός παράγων είναι ο $p(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$).

(ii) Με χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα που προσδιορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση.

(iiia) Να εξεταστεί αν υπάρχει λύση y_0 της εξίσωσης τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} y_0(x) = 2020$.

(iiib) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από την εξίσωση και την αρχική τιμή $y(1) = 0$.

Θέμα 5

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + ky(x) = f'(x) + mf(x),\ \ x \in \mathbb{R}\ (k > 0, m \in \mathbb{R}).$$

(i) Αν $k = m$, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις y της εξίσωσης τείνουν ασυμπτωτικά προς την f, για $x \to +\infty$ [δηλαδή, $\lim_{x\to+\infty}(y(x) - f(x)) = 0$]. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε μια συνάρτηση g έτσι ώστε όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y'(x) + 5y(x) = g(x),\ \ x \in \mathbb{R}$$

να τείνουν ασυμπτωτικά προς τη συνάρτηση $2x^2 + 5x - 6$, για $x \to +\infty$.

(ii) Αν $m = k + 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2020$, να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} y(x)$

(iii) Να εξεταστεί η αλήθεια της πρότασης: Αν για μία ομογενή γ.δ.ε $n-$τάξης (E_0) υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων του οποίου η ορίζουσα Wronski είναι σταθερή στο διάστημα I, τότε η ορίζουσα Wronski οποιουδήποτε συνόλου λύσεων της ίδιας εξίσωσης είναι επίσης σταθερή στο διάστημα I. Αλλάζει η απάντησή σας αν από την υπόθεση παραληφθεί η λέξη «βασικό»;

Θέμα 6

(i) Να λυθεί το π.α.τ

$$2y'(t) = [y(t) - 1]y''(t),\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = -1.$$

(ii) Αν $y_1(x), y_2(x),\ \ x \in \mathbb{R}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων μίας ομογενούς γ.δ.ε δεύτερης τάξης, να δείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει το πολύ μία ρίζα της y_2.

(iii) Να αναχθεί η εξίσωση $y'(x) = \dfrac{2x + 3y - 8}{3x + 4y - 11}$ σε μία γ.δ.ε πρώτης τάξης. Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης διαφορετικών από την αναγωγή.

(iv) Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις του π.α.τ $y'(t) = y(t)[6 - 2y(t)],\ \ y(0) = 1$, τείνουν προς το 3, για $t \to +\infty$.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα από τα θέματα 1-5 και σε δύο ερωτήματα από το θέμα 6. Στο θέμα 4 να απαντηθεί ένα ερώτημα εκ των (iiia), (iiib).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ